Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки

Кафедра вищої математики

04-02-50М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи та підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни **«Вища математика»** для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за *освітньо-професійними програмами*: «Фінанси, банківська справа та страхування», «Міжнародний бізнес», «Облік і оподаткування», «Маркетинг», «Менеджмент», «Економіка підприємства», «Управління персоналом і економіка праці», «Економічна кібернетика», *спеціальностей*: 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 292 «Міжнародні економічні відносини», 071 «Облік і оподаткування», 075 «Маркетинг», 073 «Менеджмент», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність», 051 «Економіка» денної та заочної форм навчання
Частина 3 («Теорія ймовірностей»)

Рекомендовано науково-методичною радою
з якості ННІЕМ
Протокол № 1 від 04.01.2021 р.

Рівне – 2021

Методичні вказівки до самостійної роботи та підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни **«Вища математика»** для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за *освітньо-професійними програмами*: «Фінанси, банківська справа та страхування», «Міжнародний бізнес», «Облік і оподаткування», «Маркетинг», «Менеджмент», «Економіка підприємства», «Управління персоналом і економіка праці», «Економічна кібернетика», *спеціальностей*: 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 292 «Міжнародні економічні відносини», 071 «Облік і оподаткування», 075 «Маркетинг», 073 «Менеджмент», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність», 051 «Економіка» денної та заочної форм навчання. Частина 3 («Теорія ймовірностей») [Електронне видання] / Цецик С. П., Самолюк І. В. – Рівне : НУВГП, 2021. – 49 с.

Укладачі:

Цецик С. П, - к.п.н, доцент кафедри вищої математики;
Самолюк І. В. – асистент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск:

Тадеєв П. О., к.фіз.-мат.н., д.п.н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівники груп забезпечення:

072, Мельник Л. М., к.е.н., доцент кафедри фінансів та економіки природокористування;

292, Качан О. І., к.е.н., доцент кафедри економіки підприємства і міжнародного бізнесу;

071, Позняковська Н. М., к.е.н., завідувач кафедри обліку і аудиту;

075, Попко О. В., к.е.н., доцент кафедри маркетингу;

073, Кожушко Л. Ф., д.т.н., професор, завідувач кафедри менеджменту;

076, Кушнір Н. Б., к.е.н., доцент кафедри економіки підприємства і міжнародного бізнесу;

051, Юрчик Г. М., к.е.н., доцент кафедри трудових ресурсів і підприємництва;

051, Грицюк П. М., д.е.н.,завідувач кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Вступ

Мета навчальної дисципліни «Вища математика» – формування системи теоретичних знань і практичних навичок з основ математичного апарату.

Завдання навчальної дисципліни «Вища математика» – вивчення основних принципів та інструментарію математичного апарату, який використовується для розв’язування задач за фахом.

У результаті вивчення даного курсу студент повинен:

знати: правила аналітичних перетворень, методи розв’язання математичних задач; означення основних математичних понять; формулювання та доведення основних теорем; основні властивості математичних об'єктів та можливості їх застосування до розв’язання конкретних економічних задач;

уміти: використовувати набуті математичні знання для розв'язання економічних задач; розв'язувати типові математичні задачі з доведенням їх до практичного прийнятного результату з використанням різних обчислювальних засобів; аналізувати одержані результати та на їх основі розробляти практичні рекомендації; самостійно вивчати навчальну літературу з математики.

У методичних рекомендаціях подано кроткі теоретичні відомості, необхідні для розв’язання задач з розділу «Теорія ймовірностей». Наведено приклади розв’язання типових задач, що виносяться на модульні роботи. Для закріплення здобутих студентами знань і формування навичок розв’язання задач, наведено завдання для самостійної роботи.

§1. Класичне означення ймовірності. Елементи комбінаторики

Ймовірність $P(A)$ події A є число $\left(0 \le P(A) \le 1\right)$, що характеризує ступінь достовірності цієї події і є кількісною мірою її появи.

Нехай експеримент має n рівно можливих наслідків, що утворюють певну групу, при чому m із них сприяє появі події A. Тоді, використовуючи класичне означення ймовірності події, маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

При знаходженні m і n часто доводиться використовувати елементи комбінаторики: розміщення, перестановки і комбінації.

Розміщеннями з n елементів по m називаються групи, які відрізняються одна від одної або елементами або їх порядком. Число розміщень знаходимо за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Перестановками із n елементів називаються групи, які містять всі елементи і їх кількість:

$$P_n = A_n^n = n!$$

Комбінаціями із n елементів по m називаються групи із m елементів, які відрізняються одна від одної елементами. Число комбінацій знаходиться за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \text{ або } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Справедливі властивості:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Приклад 1. Скільки тризначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри у числі не повторюються?

Розв’язання. Оскільки складені тризначні числа утворюють розміщення, то їх число дорівнює: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Приклад 2. Скільки п’ятизначних чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо цифри у числі не повторюються?

Розв’язання. Із п’яти даних цифр можна скласти $P_5 = 5!$ перестановок. Ці перестановки дають різні п’ятизначні числа за винятком тих перестановок, які починаються нулем. Число таких перестановок дорівнює $P_4 = 4!$ Отже, з даних цифр можна утворити: $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$ різних п’ятизначних чисел.

Приклад 3. Мале підприємство має ліцензію на проведення десяти видів комерційної діяльності. На початку діяльності воно планує займатися трьома видами. Скількома способами можна вибирати ці три види комерційної діяльності?

Розв’язання. Із десяти елементів потрібно вибрати три елементи, які відрізняються хоча б одним елементом. Це можна зробити: $C_{10}^{3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ способом.

Приклад 4. Розв’язати рівняння: $e_{x-3}^{x-5} = x^2 - 3x - 9$.

Розв’язання. Оскільки $C_n^m = C_n^{n-m}$, то $e_{x-3}^{x-5} = C_{x-3}^{2} = \dfrac{(x-3)(x-4)}{2}$. Тому маємо рівняння $\dfrac{(x-3)(x-4)}{2} = x^2 - 3x - 9$ або $x^2 + x - 30 = 0$; $x = 5$, $x = -6$. Враховуючи, що дане рівняння має зміст при $x \geq 5$, маємо, що $x = 5$ – розв’язок даного рівняння.

Приклад 5. До ради директорів компанії входять *4* менеджери та *6* технологів. Планується створити підкомітет із чотирьох членів. Яка ймовірність, що підкомітет буде складатись з двох технологів і двох менеджерів.

Розв’язання. Подія *A* – в підкомітет входить два менеджери та два технологи. Число всіх способів вибору чотирьох членів із десяти $n = C_{10}^{4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$. Число наслідків, які сприяють події A, $m = C_4^2 \cdot C_6^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 90$.

Отже, шукана ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_6^2}{C_{10}^4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$.

Приклад 6. У змаганнях беруть участь 25 спортсменів. Скількома способами можна розділити три перших місця?

Відповідь. $A_{25}^3 = 13800$.

Приклад 7. Скількома способами можна з 10 осіб вибрати комісію, яка складається з 4 осіб?

Відповідь. $210 \quad (C_{10}^4)$.

Приклад 8. Скількома способами можна розмістити 6 гостей за круглим столом?

Відповідь. $720 \quad (6!)$.

Приклад 9. П'ять авіакомпаній подали заявку на експлуатацію нового маршруту, на якому можуть працювати лише дві компанії. Скількома способами можна їх вибрати?

Відповідь. 20.

Приклад 10. Розв'язати рівняння: $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$.

Відповідь. 10.

Приклад 11. На п'ятьох картках написані цифри: 1, 2, 3, 4, 5.

1. Навмання вибрані по одній всі картки і складені в ряд. Яка ймовірність того, що складене число – 53421?

Відповідь. $\frac{1}{5!}$.

2. Навмання вибрані по одній три картки і складені в ряд. Яка ймовірність того, що складене число – 153?

Відповідь. $\frac{1}{A_5^3}$.

3. Навмання вибрані по одній три картки і складені в ряд. Яка ймовірність того, що з них можна скласти число – 153?

Відповідь. $\frac{P_3}{A_5^3}$.

Приклад 12. Серед 12 лотерейних білетів є 7 виграшних. Навмання вибрано 4 білети. Знайти ймовірність того, що: *а*) всі вибрані білети – виграшні; *б*) тільки два білети – виграшні.

Відповідь. *а*) $\frac{C_7^4}{C_{12}^4}$; *б*) $\frac{C_7^2 \cdot C_5^2}{C_{12}^4}$.

Приклад 13. В конверті серед 100 фотографій знаходиться розшукувана фотографія. Із конверта навмання береться 10 фотографій. Знайти ймовірність того, що серед них є шукана фотографія.

Відповідь. $\frac{C_{99}^9}{C_{100}^{10}}$.

Приклад 14. Шифр цифрового замка містить 10 цифр, кожна з яких приймає деякі цілі числа від 0 до 9. Знайти ймовірність того, що навмання вибрані 10 цифр співпадають з шифром.

Відповідь. $\frac{1}{10^{10}}$.

Приклад 15. Кидається два шестигранних кубики, на гранях яких нанесені цифри від 1 до 6. Знайти ймовірність того, що сума цифр, які випадуть на верхніх гранях, дорівнює 8, а різниця – 4.

Відповідь. $\frac{1}{18}$.

Приклад 16. Набираючи номер телефону, абонент забув останні чотири цифри і, пам'ятаючи, що ці цифри різні набрав їх навмання. Яка ймовірність того, що набрано потрібні цифри?

Відповідь. $\frac{1}{90}$.

Приклад 17. В пеналі знаходеться 6 червоних і 4 зелених олівці. З нього навмання вибрано 4 олівці. Яка ймовірність того, що два з них виявляться червоні?

Відповідь. $\frac{3}{7}$.

Статистичне означення ймовірності

Класичним означенням ймовірності не завжди можна користуватись. Це відноситься до випадків, якщо число наслідків експерименту нескінченне або не можна гарантувати їх рівноможливість.

Нехай проведено n випробувань, в яких подія A відбулась M разів. Відношення $\frac{M}{n}$ називається відносною частиною появи події A і позначається $W(A)=\frac{M}{n}$. Ця величина має випадковий характер, але зі збільшенням числа випробувань n вона усе менше відхиляється від деякої сталої, яка приймається за ймовірність події A (статистичне означення ймовірності).

Приклад 18. Із 600 протестованих електричних ламп деякого типу, 540 пропрацювали понад 1000 годин. Визначити ймовірність нормального функціонування лампи такого типу понад 1000 годин.

Розв'язання. Маємо $n=600$, $M=540$, тому $P(A)=W(A)=\frac{540}{600}=0{,}9$.

Приклад 19. При стрільбі з гвинтівки відносна частина попадання в ціль виявилась рівною 0,9. Знайти число попадань, якщо всього було проведено 120 пострілів.

Відповідь. 108.

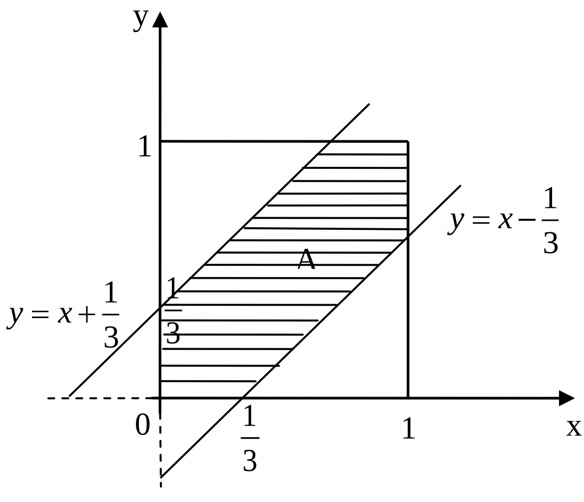
§2. Геометричні ймовірності

Нехай всі наслідки експерименту можна прийняти за множину точок деякої області U, частину якої займає подія $A(A\subset U)$.

Ймовірністю події A є число $P(A)=\frac{m(A)}{m(U)}$, де $m(A)$ і $m(U)$ – міра (довжина, площа, об'єм) областей A та U. Така ймовірність називається геометричною.

Приклад 20. Іван і Петро домовились зустрітись між 17-ю і 18-ю годиною. Яка ймовірність того, що жоден з них не чекатиме іншого більше ніж $\frac{1}{3}$ години, якщо прихід як одного, так і другого рівноможливий у будь-який момент протягом зазначених годин.

Розв'язання. Позначимо через x проміжок часу після 17-ї години до моменту приходу Івана, а через y – проміжок часу після 17-ї години до моменту приходу Петра. Очевидно, що x і y повинні задовольняти умовам $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Отже, множину U всіх можливих наслідків випробування можна зобразити як множину точок квадрата, зі стороною довжини 1, при чому всі наслідки випробування слід вважати рівно можливими. Проміжок часу приходу обох буде не більшим від $\frac{1}{3}$, яку можна записати у вигляді $-\frac{1}{3} \le x - y \le \frac{1}{3}$, або $x - y \le \frac{1}{3}$ і $x - y \ge -\frac{1}{3}$, або $\begin{cases} y \ge x - \frac{1}{3}, \\ y \le x + \frac{1}{3}. \end{cases}$



Отже, множина $U=\{(x,y)|,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$,

$A=\left\{(x,y)\middle|,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ y\ge x-\frac{1}{3},\ y\le x-\frac{1}{3}\right\}$.

Очевидно $m(U)=1$, $m(A)=1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$.

Отже, $P(A)=\frac{m(A)}{m(U)}=\frac{5}{9}$.

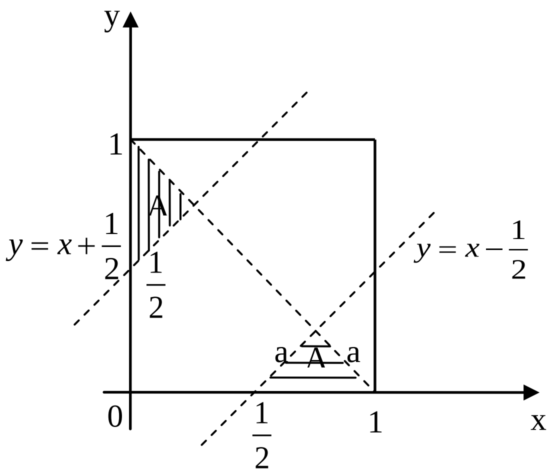
Приклад 21. Між нулем і одиницею вибирається два числа. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел буде не більша від 1, а модуль їх різниці не менше від $\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Позначимо невідомі числа x і y. За умовою маємо: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$. Це означає, що областю U в прямокутній системі координат Oxy є квадрат зі стороною довжини 1.

Область A знаходимо з умови задачі: $x+y\le 1$ і $|x-y|\ge\frac{1}{2}$. З останньої умови маємо: $x-y\ge\frac{1}{2}$ або $y\ge x+\frac{1}{2}$.

Отже, область $A=\left\{(x,y)\middle|,\ x+y\le 1,\ y\le x-\frac{1}{2},\ y\ge x+\frac{1}{2}\right\}$.

Зобразимо області U і A на координатній площині:



Площина області $U = m(U) = 1$. Область A – два прямокутні трикутники. Позначивши катет такого прямокутника – a, маємо: $m(A) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 = a^2$, але $a^2 + a^2 = \frac{1}{4}$, $a^2 = \frac{1}{8}$.

Тому $m(A) = \frac{1}{8}$. Отже, $P(A) = \frac{m(A)}{m(U)} = \frac{1}{8}$.

Приклад 22. У круг, радіус якого R, навмання кидається точка. Знайти ймовірність того, що ця точка опиниться поза квадратом, вписаним в цей круг.

Відповідь. $P(A) = \frac{\pi R^2 - 2R^2}{\pi R^2} = \frac{\pi - 2}{\pi}$.

Приклад 23. У круг, радіус якого R, навмання кидається точка. Знайти ймовірність того, що ця точка опиниться в правильному трикутнику, вписаному в цей круг.

(Вказівка. $S_\Delta = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$, $a = R\sqrt{3}$). ***Відповідь.*** $P(A) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Приклад 24. Навмання вибирається число, яке лежить між нулем і одиницею. Знайти ймовірність того, що це число буде не менше 0,25 і не більше 0,75.

Відповідь. $P(A)=0{,}5$.

Приклад 24. Дано два концентричні кола з радіусами 5 см і 10 см. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута на великий круг, попаде на кільце.

Відповідь. 0,75.

Приклад 25. Між нулем і одиницею вибирається три числа. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел буде не менше від $\frac{1}{2}$ але не більше 1.

(Вказівка. Об'єм області A дорівнює різниці об'ємів пірамід, утворених площинами $x+y+z=1$, $x+y+z=\frac{1}{2}$ і координатними площинами. Область U – куб, ребро якого дорівнює 1).

Відповідь. $\frac{7}{48}$.

§3. Теореми додавання та множення ймовірностей

При обчисленні ймовірностей складних подій використовуються правила додавання та множення ймовірностей.

Якщо події A і B несумісні (не можуть одночасно відбутись) то подія $C=A+B$ означає або появу події A або B і $P(A+B)= \;=P(A)+P(A)$, тобто ймовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій. Аналогічно це твердження справедливе для довільного числа несумісних подій.

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють повну групу подій, то $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$. Тому для двох протилежних подій A і $\overline{A}$, маємо $P(A)+P(\overline{A})=1$.

В тих випадках, якщо ймовірність події $\overline{A}$ знайти простіше ніж ймовірність події A, користуються формулою $P(A)=1-P(\overline{A})$.

Події A і B називаються залежними, якщо ймовірність однієї з них залежить від появи іншої. В цьому випадку ймовірність події A за умови, що відбулась подія B, називається умовною і позначається $P_B(A)$.

Подія $C = A \cdot B$ називається добутком події A та B і означає сумісне виконання подій A і B.

Якщо A і B залежні, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$. Якщо події A і B незалежні, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. Аналогічні формули справедливі для довільного числа подій.

Приклад 27. Робітник обслуговує три вузли технологічної лінії. Ймовірність того, що протягом зміни уваги робітника вимагає перший вузол, дорівнює 0,7, другий – 0,8, третій – 0,9. Знайти ймовірність того, що протягом зміни уваги робітника вимагатимуть *а*) будь-які два вузли; *б*) хоча б один вузол.

Розв'язання. Введемо позначення подій:

A – уваги робітника вимагає перший вузол;
B – уваги робітника вимагає другий вузол;
C – уваги робітника вимагає третій вузол;
D – уваги робітника вимагають будь-які два вузли;
E – уваги робітника вимагає хоча б один вузол.

Відповідно умови задачі маємо: $P(A) = 0{,}7,\ P(B) = 0{,}8,\ P(C) = 0{,}9$;

$P(\overline{A}) = 0{,}3,\ P(\overline{B}) = 0{,}2,\ P(\overline{C}) = 0{,}1$. Події A, B, C незалежні.

а) Виразимо подію D через A, B, C.

$D = A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$.

Оскільки події $AB\overline{C},\ A\overline{B}C,\ \overline{A}BC$ – несумісні, то використовуючи теореми про ймовірність суми несумісних і добутку незалежних подій, маємо:

$$P(D) = P(A)\,P(B)\,P(\overline{C}) + P(A)\,P(\overline{B})\,P(C) + P(\overline{A})\,P(B)\,P(C) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 =$$
$$= 0{,}056 + 0{,}126 + 0{,}216 = 0{,}398.$$

б) $P(E) = 1 - P(\overline{E})$, $\overline{E} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

$P(E)=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C})=1-P(\overline{A})\,P(\overline{B})\,P(\overline{C})=$
$=1-0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=1-0{,}006=0{,}994$.

Приклад 28. Проводиться випробування насосної станції, на якій змонтовано 3 насоси, що дублюють один одного. Ймовірність безвідмовної роботи першого насоса становить 0,4, другого – 0,45, третього – 0,65. Знайти ймовірність виходу з ладу всієї станції за час t.

Розв'язання. Позначимо події: A, B, C – відповідно робота першого, другого та третього насосів. D – вихід з ладу всієї станції. Події A, B, C – незалежні. Очевидно $D=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$. Тому маємо: $P(D)=P(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C})=P(\overline{A})\,P(\overline{B})\,P(\overline{C})$. Оскільки, $P(A)=0{,}4,$ $P(B)=0{,}45,$ $P(C)=0{,}65$; $P(\overline{A})=0{,}6,$ $P(\overline{B})=0{,}55,$ $P(\overline{C})=0{,}35$.
Отже, $P(D)=0{,}6\cdot 0{,}55\cdot 0{,}35=0{,}1155$.

Приклад 29. Серед 12 різних довідників, які є в читальному залі, шукана інформація міститься у п'яти із них. Навмання вибрані 5 довідників. Яка ймовірність того, що шукана інформація міститься хоча б в одному з вибраних довідників?

Розв'язання. Нехай подія A – хоча б в одному з вибраних довідників міститься шукана інформація. Тоді $P(A)=1-P(\overline{A})$, де $\overline{A}$ – у вибраних довідниках шукана інформація відсутня. В цьому випадку вибрано довідники, із семи у яких потрібної інформації немає. Тому маємо: $P(\overline{A})=\dfrac{C_7^5}{C_{12}^5}=\dfrac{C_7^2}{C_{12}^5}=\dfrac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}\approx 0{,}0265$. Отже, $P(A)=1-0{,}0265=0{,}9735$.

Приклад 30. Система, яка складається із трьох елементів, виходить з ладу у випадку, коли відмовляють всі три її елементи. Знайти ймовірність того, що система не вийде з ладу (надійність), якщо елементи незалежні і ймовірність безвідмовної роботи кожного з них відповідно дорівнює 0,8, 0,85, 0,9.

Відповідь. $p=0{,}997$.

Приклад 31. Два верстати працюють незалежно один від одного. Ймовірність безвідмовної роботи протягом години для одного верстата становить 0,7, для другого – 0,8. Яка ймовірність того, що протягом години будуть відмови в роботі лише в одного верстата?

Відповідь. 0,38.

Приклад 32. На книжній полиці в довільному порядку розставлено 14 різних підручників, 6 з яких з математики. Студент бере навмання 3 підручники. Яка ймовірність того, що принаймні один з взятих підручників виявиться підручником з математики?

Відповідь. $\frac{11}{13}$.

Приклад 33. Ймовірність виконання кожної з трьох незалежних подій відповідно становить 0,6; 0,8; 0,9. Знайти ймовірність того, що виконується: *а*) тільки одна подія; *б*) виконується хоча б одна подія.

Відповідь. *а*) 0,116; *б*) 0,992.

Приклад 34. Серед 6 лотерейних білетів є 3 виграшні. Два покупці навмання вибрали по одному білету. Використовуючи теорему множення ймовірностей для залежних подій, знайти ймовірність того, що вибрані білети – виграшні.

Відповідь. 0,2.

Приклад 35. Для сигналізації про аварію в цеху встановлено три незалежно працюючі контрольні пристрої. Ймовірність спрацювання під час аварії кожного з них відповідно дорівнює 0,9; 0,95; 0,85. Знайти ймовірність того, що під час аварії спрацює: *а*) один пристрій; *б*) два пристрої; *в*) хоча б один пристрій.

Відповідь. *а*) 0,02525; *б*) 0,24725; *в*) 0,99925.

Приклад 36. В електричне коло послідовно ввімкнено три елементи, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови кожного з них відповідно дорівнює 0,1; 0,15; 0,2. Знайти ймовірність того, що в колі не буде струму.

Відповідь. 0,388.

§3. Формула повної ймовірності та формула Байєса

Якщо події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – утворюють повну групу подій (гіпотез), а подія A може відбутись з однією із цих гіпотез, то для знаходження ймовірності події A використовується формула повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P_{H_i}(A).$$

Після знаходження ймовірності $P(A)$ при теоретичних ймовірностях $P(H_i)$ можна уточнити ймовірності цих гіпотез, якщо подія A відбулась. Це можна зробити за формулою Байєса:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\, P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

де $P(A)$ знайдено за формулою повної ймовірності.

Приклад 37. На підприємство надходить сировина від трьох постачальників, при чому від першого постачальника припадає 55% від об'єму поставок, від другого – 30%, від третього – 15%. Із практики відомо, що від першого постачальника надходить 6% некондиційної сировини, від другого – 4%, від третього – 8%. Яка ймовірність того, що *а*) випадково взята проба виявила некондиційну сировину; *б*) випадково виявлена некондиційна сировина надійшла від другого постачальника.

Розв'язання. Подія A – виявлено некондиційну сировину;
H_1 – сировина надійшла від першого постачальника;
H_2 – сировина надійшла від другого постачальника;
H_3 – сировина надійшла від третього постачальника.
Згідно умови задачі: $P(H_1) = 0{,}55,\ P(H_2) = 0{,}3,\ P(H_3) = 0{,}15$;
$P_{H_1}(A) = 0{,}06,\ P_{H_2}(A) = 0{,}04,\ P_{H_3}(A) = 0{,}08$.

а) За формулою повної ймовірності, маємо:
$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A) =$
$= 0{,}55\cdot 0{,}06 + 0{,}3\cdot 0{,}04 + 0{,}15\cdot 0{,}08 = 0{,}057$.

б) Скористаємось формулою Байєса:

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\,P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}04}{0{,}057}=0{,}21\,.$$

Приклад 38. В двох коробках містяться електричні лампочки. В першій міститься 5 лампочок на 100 вт і 4 лампочки на 60 вт, а в другій – 6 лампочок на 100 вт і 5 лампочок на 60 вт. Із першої коробки в другу переклали 2 лампочки, після чого з неї навмання вибрали одну лампочку. Яка ймовірність, що вибрана лампочка на 100 вт?

Розв'язання. Подія A – вибрана лампочка на 100 вт;

H_1 – з першої коробки в другу переклали дві лампочки на 100 вт;

H_2 – з першої коробки в другу переклали одну лампочку на 100 вт і одну лампочку на 60 вт;

H_3 – з першої коробки в другу переклали дві лампочки на 60 вт.

За формулою повної ймовірності, маємо:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)$$

Знайдемо ймовірності подій, які містяться у формулі, виходячи з умови задачі.

$$P(H_1)=\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{5}{18},\ P(H_2)=\frac{C_5^1\cdot C_4^1}{C_9^2}=\frac{5}{9},\ P(H_3)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{1}{6}\ ;$$

$$P_{H_1}(A)=\frac{8}{13},\ P_{H_2}(A)=\frac{7}{13},\ P_{H_3}(A)=\frac{6}{13}\,.$$

Тому, $P(A)=\frac{5}{18}\cdot\frac{8}{13}+\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{13}+\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{13}=\frac{64}{117}\approx 0{,}547\,.$

Приклад 39. Прилади одного найменування виготовляються двома заводами. Перший завод виготовляє $\frac{2}{3}$ всіх приладів, другий – $\frac{1}{3}$. Ймовірність безвідмовної роботи приладу, виготовленого першим заводом дорівнює 0,75, другим – 0,9. Знайти ймовірність *а*) безвідмовної роботи приладу, який поступив в експлуатацію; *б*) того, що прилад виготовлений другим заводом.

Відповідь. *а*) 0,8; *б*) 0,375.

Приклад 40. Прилад може працювати в двох режимах – I та II. Режим I спостерігається у 90% всіх випадків роботи приладу, режим II – в 10%. Ймовірність виходу приладу з ладу за час t в режимі I дорівнює 0,1, в режимі II – 0,7. Знайти ймовірність виходу приладу за час t.

Відповідь. 0,16.

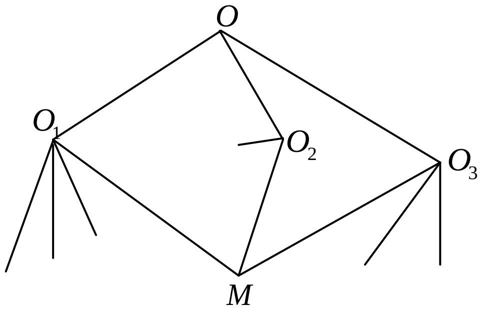
Приклад 41. На склад надходить продукція з чотирьох конвеєрних ліній, частка кожної з них відповідно дорівнює 40%, 30%, 20%, 10%. Відомо, що ймовірність браку для першої лінії становить 0,005, для другої – 0,01, для третьої – 0,015, для четвертої – 0,02. Знайти ймовірність, що навмання взята одиниця продукції немає браку.

Відповідь. 0,99.

Приклад 42. Верстати A і B виготовляють 60% і 40% продукції фабрики. Частка бракованої продукції складає для них відповідно 3% і 5%. Вибрана навмання одиниця продукції виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на верстатах A і B.

Відповідь. 0,47; 0,53.

Приклад 43. Турист виходить з пункту O і на кожному перехресті навмання обирає один з можливих шляхів. Яка ймовірність того, що турист прийде в пункт M?



Відповідь. $\frac{13}{36}$.

Приклад 44. Подія A може відбутись при умові появи однієї з подій B_1, B_2, B_3, які утворюють повну групу подій (гіпотез). Після появи події A були знайдені (переоцінені) ймовірності гіпотез B_1 і B_2, а саме: $P_A(B_1)=0{,}6$ і $P_A(B_2)=0{,}3$. Обчислити умовну ймовірність $P_A(B_3)$ гіпотези B_3.

Відповідь. $P_A(B_3)=1-(0{,}6+0{,}3)=0{,}1$.

Приклад 45. Деякий виріб перевіряється на стандартність одним із двох контролерів. Ймовірність того, що цей виріб буде перевіряти перший контролер рівна 0,55, другий – 0,45. Ймовірність того, що виріб буде визначений стандартним першим контролером дорівнює 0,9, а другим – 0,95. Знайти ймовірність того, що виріб перевіряв другий контролер.

Відповідь. $p \approx 0{,}46$.

Приклад 46. Серед n екзаменаційних білетів є N "щасливих". Студенти підходять за білетами один за одним. У кого більша ймовірність вибрати "щасливий" білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

Відповідь. Однакова.

§5. Незалежні випробування. Формула Бернуллі

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких можливі лише два наслідки A або $\overline{A}$, при чому в кожному досліді ймовірність появи події A однакова і дорівнює $P(A)=p$ $(0<p<1)$. Тоді ймовірність того, що в n випробуваннях подія A з'явиться K разів, обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_n(K)=C_n^k\, p^k\, q^{n-k}\text{, де } q=1-p\,.$$

Ймовірність того, що в n дослідах подія наступить: *а*) менше m раз; *б*) більше m раз; *в*) не менше m раз; *г*) не більше m раз – знаходиться за формулами:

а) $P_n(0\le K<m)=P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(m-1)$,

б) $P_n(m<K\le n)=P_n(m+1)+P_n(m+2)+\ldots+P_n(n)$,

в) $P_n(m \le K \le n) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n)$,

г) $P_n(0 \le K \le m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m)$.

Найвірогідніше число K_0 появ події у схемі Бернуллі визначається із нерівностей:

$$np - q \le K_0 < np + p, \text{ зокрема:}$$

а) якщо число $np - q$ – дробове, то існує одне найвірогідніше число K_0;

б) якщо число $np - q$ – ціле, то існує два найвірогідніших числа $K_0 = np - q$ і $K_0 + 1 = np + p$;

в) якщо np – ціле, то $K_0 = np$.

Приклад 47. Встановлено, що 80% продукції заводу є вищої якості. Яка ймовірність того, що із чотирьох взятих навмання виробів два вироби виявляться вищої якості? Знайти найвірогідніше число виробів вищої якості.

Розв'язання. Оскільки $n = 4$, $K = 2$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, використовуючи формулу Бернуллі, маємо:

$$P_4(2) = C_4^2\ 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 6 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}04 = 0{,}1536.$$

Отже, ймовірність того, що з чотирьох навмання вибраних виробів два вироби виявляться вищої якості дорівнює 0,1536.

Найвірогідніше число виробів вищої якості з чотирьох навмання вибраних, знайдемо з нерівності: $np - q \le K_0 < np + p$, або $4 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le K_0 < 4 \cdot 0{,}8 + 0{,}8$, або $3 \le K_0 < 4$. Оскільки, $np - q = 3$ – ціле число, то маємо два найвірогідніших числа: $K_0 = 3$ і $K_0 + 1 = 4$.

Приклад 48. Проростання насіння становить 90%. Відбирається для посіву 5 зерен. Яка ймовірність того, що з них проросте не менше 3-ох зерен?

Розв'язання. Маємо, що ймовірність проростання насіння дорівнює $p = 0{,}9$. Потрібно знайти ймовірність того, що з них проросте або 3, або 4, або 5 зерен. Тому,

$$P(3 \le K \le 5) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) =$$

$$= C_5^3\ 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2 + C_5^4\ 0{,}9^4 \cdot 0{,}2 + C_5^5\ 0{,}9^5 \cdot 0{,}2^0 =$$

$=10\cdot 0{,}729\cdot 0{,}01+5\cdot 0{,}6561\cdot 0{,}2+0{,}59049=0{,}99585\approx 0{,}996$.

Приклад 49. Проводиться 10 незалежних пострілів в мішень. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює $\frac{1}{2}$. Знайти ймовірність того, що в мішені буде не менше восьми влучень.

Відповідь. $P_{10}(8)+P_{10}(9)+P_{10}(10)=\frac{7}{128}$.

Приклад 50. Ймовірність того, що електрична лампочка не вийде з ладу після 1000 годин роботи дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що принаймні одна з трьох лампочок не вийде з ладу після 1000 годин роботи.

Відповідь. $P_3(K\geq 1)=1-P_3(0)=0{,}488$.

Приклад 51. Ймовірність того, що рефрижератор вийде з ладу протягом місяця дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що протягом місяця із шести рефрижераторів: *а*) не більше ніж один вийде з ладу; *б*) принаймні один вийде з ладу.

Відповідь. *а*) $P_6(0)+P_6(1)=0{,}65536\approx 0{,}6553$;

б) $1-P_6(0)=0{,}737856\approx 0{,}7378$.

Приклад 52. Два рівносильних шахісти грають у шахи. Що ймовірніше виграти: дві партії з чотирьох чи три партії з шести?

Відповідь. Ймовірніше виграти дві партії з чотирьох:

$P_4(2)=\frac{3}{8},\ P_6(3)=\frac{5}{16}$.

Приклад 53. Ймовірність виконання події A в кожному з 15 незалежних дослідів дорівнює 0,9. Знайти найвірогідніше число появи події A в цих дослідах.

Відповідь. $K_0=14$.

Приклад 54. Ймовірність виграшу на білет книжкової лотереї дорівнює 0,3. Яка ймовірність, маючи 4 білети, виграти: *а*) на 2 білети; *б*) хоча б на 2 білети.

Відповідь. *а*) 0,2646; *б*) 0,3483.

§6. Локальна та інтегральна формули Муавра-Лапласа. Формула Пуассона

Нехай n – велике число випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A однакова і дорівнює p $(0 < p < 1)$. Тоді ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A з'явиться K разів обчислюється за локальною формулою Муавра-Лапласа:

$$P_n(K) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

$$\text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція $\varphi(x)$ – парна і її значення наведені у відповідних таблицях і для $x \geq 5$ практично $\varphi(x) = 0$.

Якщо при великому числі дослідів потрібно знайти $P_n(K_1 \leq K \leq K_2)$, то використовують інтегральну формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(K_1 \leq K \leq K_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ де}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ – формула Лапласа,}$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція $\Phi(x)$ – непарна, її значення наведені у відповідних таблицях і для $x \geq 5$ практично $\Phi(x) = 0{,}5$.

Якщо n – велике число $(n \to \infty)$, а ймовірність p мала і $np = \lambda < 10$, то справедлива формула Пуассона:

$$P_n(K) \approx \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}.$$

Приклад 55. Щоденно 100 автомобілів постачають сировину на цукровий завод. Ймовірність безвідмовної роботи кожного з них протягом дня дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що протягом дня безвідмовно працюватимуть: *а*) 70 автомобілів; *б*) від 70 до 85 автомобілів.

Розв'язання.

а) Оскільки $n = 100$ досить велике, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, то в даному випадку слід скористатись локальною формулою Муавра-Лапласа.

Маємо: $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 4$, $np = 100 \cdot 0{,}8 = 80$, $K = 70$; $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{70-80}{4} = -2{,}5$. За таблицями функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(x_1) = \varphi(-2{,}5) = \varphi(2{,}5) = 0{,}018$. Отже, $P_{100}(70) = \dfrac{1}{4} \cdot 0{,}018 = 0{,}0045$.

б) Для знаходження $P_{100}(70 \le K \le 85)$ скористаємось інтегральною формулою Муавра-Лапласа. За умовою $n = 100$, $K_1 = 70$, $K_2 = 85$. Обчислимо x_1 та x_2: $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{70-80}{4} = -2{,}5$, $x_2 = \dfrac{K_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{85-80}{4} = 1{,}25$.

Тому $P_{100}(70 \le K \le 85) \approx \Phi(1{,}25) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(1{,}25) + \Phi(2{,}5)$. За таблицею значень функції Лапласа, знаходимо $\Phi(1{,}25) = 0{,}394$, $\Phi(2{,}5) = 0{,}494$. Отже, маємо $P_{100}(70 \le K \le 85) \approx 0{,}394 - 0{,}494 = 0{,}888$.

Приклад 56. Молокозавод відправив у магазин 500 пакетів молока. Ймовірність пошкодження пакета під час транспортування дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що під час транспортування буде пошкоджено: *а*) чотири пакета; *б*) менше чотирьох пакетів.

Розв'язання. Оскільки в даному випадку $n = 500$ – досить велике, а $p = 0{,}004$ близьке до нуля, то зручно користуватись формулою Пуассона. Маємо $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}004 = 2$, $e^{-2} = 0{,}1353$ – за таблицею значень функції e^x.

$$a)\ P_{500}(4)=\frac{\lambda^K}{K!}e^{-\lambda}=\frac{2^4}{4!}e^{-2}=\frac{2}{3}\cdot 0{,}1353=0{,}0902\,.$$

$$б)\ P_{500}(K<4)=P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)+P_{500}(3)=$$

$$=\frac{2^0}{0!}e^{-2}+\frac{2}{1!}e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}+\frac{2^3}{3!}e^{-2}=$$

$$=\left(1+2+2+\frac{4}{3}\right)e^{-2}=\frac{19}{3}\cdot 0{,}1353=0{,}8569\,.$$

Приклад 57. Ймовірність виконання події A в кожному з 253 незалежних дослідів дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що в цих дослідах дана подія відбудеться 65 раз.

Відповідь. 0,0484.

Приклад 58. Ймовірність виконання події A в кожному зі 100 незалежних дослідах дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що в цих дослідах дана подія відбудеться 25 раз.

Відповідь. 0,0458.

Приклад 59. Ймовірність виконання події A в кожному з 2400 незалежних дослідів дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що в цих дослідах дана подія відбудеться 980 раз.

Відповідь. 0,0118.

Приклад 60. Ймовірність того, що деталь не пройшла перевірку дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей виявиться неперевірених від 70 до 100 деталей?

Відповідь. 0,788.

Приклад 61. Ймовірність виконання події A в кожному з 900 незалежних дослідів дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в цих дослідах дана подія появиться не менше ніж 700 раз.

Відповідь. $P_{900}(700\le K\le 900)=0{,}953$.

Приклад 62. Ймовірність виконання події в кожному з 21 незалежного досліду дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія появиться в більшості дослідів.

Відповідь. $P_{21}(11\le K\le 21)=0{,}960$.

Приклад 63. Проводиться серія з 1000 випробувань, в кожному з яких подія A з'явиться з ймовірністю $p=0{,}001$.

Знайти ймовірність того, що в цій серії випробувань подія A з’явиться 5 раз.

Відповідь. 0,003.

Приклад 64. Ймовірність виконання події A в кожному зі 100 незалежних дослідів дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що дана подія в цих дослідах відбудеться менше трьох раз.

Відповідь. 0,9197.

§7. Випадкові величини. Функція розподілу. Дискретні випадкові величини. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Випадковою величиною називається така величина, яка в результаті досліду приймає тільки одне можливе значення наперед невідоме, яке залежить від випадкових причин.

Дискретною випадковою величиною називається така величина, яка приймає скінченне або зліченне число значень.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називається співвідношення між можливими значеннями цієї величини і їх ймовірностями. Для дискретної випадкової величини X закон розподілу можна задати у вигляді таблиці, перший рядок якої містить можливі значення x_i, другий – ймовірності p_i:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

де $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, якщо число значень випадкової величини зліченне, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Таку таблицю ще називають рядом розподілу ймовірностей для дискретної випадкової величини X.

Законом розподілу дискретної випадкової величини можна задати графіком у вигляді ламаної, відрізки якої сполучають точки $M_i(x_i, p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Цей графік називається многокутником розподілу.

Випадкову величину (дискретну і неперервну) можна описати за допомогою функції розподілу ймовірностей.

$F(x) = P(X < x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше x.

Приклад 65. В коробці серед 10 деталей є 3 нестандартні. Навмання вибирається 2 деталі. Скласти закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – числа стандартних деталей серед вибраних.

Розв'язання. Випадкова величина X – число стандартних деталей серед вибраних має можливі значення: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Ймовірність можливих значень: $P(X = x_k) = \dfrac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$,

де $N = 10$ – число всіх деталей в коробці;

$n = 7$ – число стандартних деталей в коробці;

$m = 2$ – число відібраних деталей;

k – число стандартних деталей серед вибраних ($k = 0$, $k = 1$, $k = 2$).

Отже, $P(X = 0) = \dfrac{C_7^0 \cdot C_3^2}{C_{10}^2} = \dfrac{3}{45}$; $P(X = 1) = \dfrac{C_7^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \dfrac{21}{45}$;

$P(X = 2) = \dfrac{C_7^2 \cdot C_3^0}{C_{10}^2} = \dfrac{21}{45}$. Тому маємо шуканий закон розподілу:

X	0	1	2
P	$\dfrac{3}{45}$	$\dfrac{21}{45}$	$\dfrac{21}{45}$

Приклад 66. Ймовірність виконання трьох незалежних подій A, B, C в одному досліді відповідно дорівнює: 0,6, 0,7, 0,8. Знайти закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – числа подій, що появились в цьому досліді.

Розв'язання. Випадкова величина X – має можливі значення: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Оскільки $P(A) = 0{,}6$,

$P(B)=0{,}7$, $P(C)=0{,}8$, то використовуючи теореми додавання і множення незалежних подій, маємо:

$P(X=0)=P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\right)=0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}024$;

$P(X=1)=P\left(A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\right)=$

$=0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}188$;

$P(X=2)=P\left(A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C\right)=$

$=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}452$;

$P(X=3)=P\left(A\cdot B\cdot C\right)=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}336$.

Отже, маємо шуканий закон розподілу випадкової величини X:

X	0	1	2	3
P	0,024	0,188	0,452	0,336

Приклад 67. Побудувати закон розподілу ймовірностей і многокутник розподілу ймовірностей для випадкового числа X події A в серії з 4-ох незалежних випробувань, якщо у кожному випробуванні подія A з'явиться з ймовірністю $2/3$.

Розв'язання. Очевидно, множиною можливих значень випадкової величини X у нашому випадку складається з чисел: 0, 1, 2, 3, 4. Оскільки в кожному з чотирьох випробувань ймовірність появи події A однакова, то для знаходження ймовірностей числових значень випадкової величини X використаємо формулу Бернуллі для $n=4$, $p=\dfrac{2}{3}$, $q=\dfrac{1}{3}$.

Оскільки $P_n(X=K)=C_n^k\, p^k\, q^{n-k}$, маємо:

$$P(X=0)=C_4^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81};$$

$$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81};$$

$$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{24}{81};$$

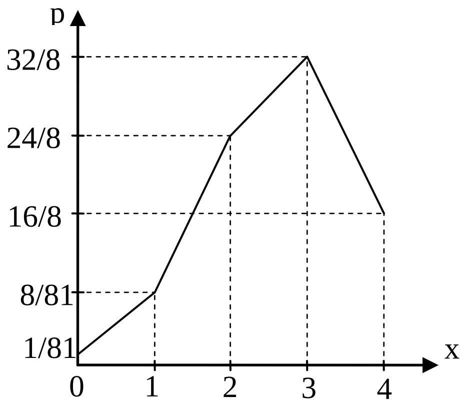
$$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81};$$

$$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{16}{81}.$$

Тому маємо шуканий закон розподілу:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

Будуємо многокутник розподілу:



Приклад 68. Дано закон розподілу випадкової величини X :

X	1	2	4	5
P	0,3	0,4	0,2	0,1

Знайти функцію розподілу ймовірностей цієї випадкової величини та побудувати її графік.

Розв'язання. За означенням функції розподілу ймовірностей маємо: $F(x)=P(X<x)$. Тому знайдемо її значення на проміжках числової осі, на які вона розділена можливими значеннями випадкової величини X :

$x\le 1,\quad F(x)=P(X<x)=0;$

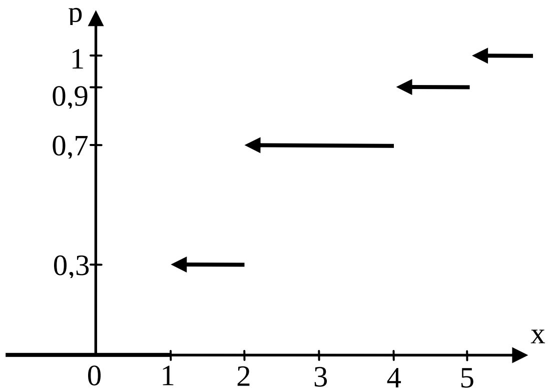
$1<x\le 2,\quad F(x)=P(X<x)=0{,}3;$

$2<x\le 4,\quad F(x)=P(X<x)=0{,}7;$

$4<x\le 5,\quad F(x)=P(X<x)=0{,}9;$

$x > 5, \quad F(x) = P(X < x) = 1$.

Отже, $F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x \le 1, \\ 0{,}3, & \textit{якщо } 1 < x \le 2, \\ 0{,}7, & \textit{якщо } 2 < x \le 4, \\ 0{,}9, & \textit{якщо } 4 < x \le 5, \\ 1, & \textit{якщо } x > 5. \end{cases}$



Приклад 69. Випробовується пристрій, що складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного з них відповідно дорівнює: 0,1, 0,2, 0,4. Знайти закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – числа відмовивших елементів.

Відповідь.

X	0	1	2	3
P	0,432	0,444	0,116	0,008

Приклад 70. На книжній полиці є 12 книг серед яких 4 з вищої математики. Навмання вибрані 2 книги. Скласти закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – числа книг з вищої математики серед двох вибраних.

Відповідь.

X	0	1	2
P	$\frac{14}{33}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{1}{11}$

Приклад 71. Скласти закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – числа появи події A в 3-ох незалежних дослідах, якщо ймовірність появи події в кожному досліді дорівнює $3/5$.

Відповідь.

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

Приклад 72. На складі є 6 деталей одного типу, серед яких 4 стандартні. Навмання відібрано 3 деталі. Скласти закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – числа стандартних деталей серед відібраних.

Відповідь.

X	1	2	3
P	0,2	0,6	0,2

Приклад 73. Знайти функцію розподілу ймовірностей випадкової величини X, заданої законом розподілу:

X	2	3	5	6
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Відповідь.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 2,\\ 0{,}1, & \text{якщо } 2<x\le 3,\\ 0{,}3, & \text{якщо } 3<x\le 5,\\ 0{,}6, & \text{якщо } 5<x\le 6,\\ 1, & \text{якщо } x>6. \end{cases}$$

Приклад 74. Задано закони розподілу випадкових величин X та Y:

X	2	3
P	0,4	0,6

Y	4	5
P	0,3	0,7

Знайти закон розподілу випадкової величини $X+Y$.

Відповідь.

$X+Y$	6	7	8
P	0,12	0,46	0,42

§8. Числові характеристики дискретної випадкової величини

Для того, щоб повніше охарактеризувати розподіл ймовірностей випадкової величини X, іноді треба знайти деякі числові характеристики. Важливими числовими характеристиками випадкової величини X є математичне сподівання $M(X)$, дисперсія $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Для дискретної випадкової величини, коли відомий ряд розподілу ймовірностей, математичне сподівання визначається формулою:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, p_i \text{, або } M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p_i \, ,$$

якщо множина значень випадкової величини є зліченною. Математичне сподівання характеризує середнє значення випадкової величини.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M\left((X - M(x))^2\right).$$

Обчислювати $D(X)$ зручніше за формулою:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 \text{, або } D(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i^{\,2} p_i - \left(M(X)\right)^2.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)} \, .$$

Дисперсія $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення характеризують ступінь розсіяння (відхилення) випадкової величини від її математичного сподівання.

Основні властивості числових характеристик:

$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$; $M(C) = C$; $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$.

Якщо X і Y незалежні, то $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

$D(C) = 0$; $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$.

Для незалежних випадкових величин:

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$; $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Математичне сподівання біноміального розподілу дорівнює добутку числа дослідів на ймовірність появи події в одному досліді: $M(X)=np$, а дисперсія – $D(X)=npq$.

Приклад 75. Знайти числові характеристики випадкової величини X, заданої законом розподілу:

X	2	4	5	6
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Розв'язання.

$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4=2\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}3+5\cdot 0{,}4+6\cdot 0{,}1=4{,}2$

.

Дисперсію знайдемо за формулою: $D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2$.

Складемо ряд розподілу ймовірностей випадкової величини X^2:

X^2	4	16	25	36
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Тому $M(X^2)=4\cdot 0{,}2+16\cdot 0{,}3+25\cdot 0{,}4+36\cdot 0{,}1=19{,}2$ і

$D(X)=19{,}2-4{,}2^2=19{,}2-17{,}64=1{,}56.$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{1{,}56}\approx 1{,}25$.

Приклад 76. Незалежні випадкові величини X та Y задані законами розподілу:

X	2	4	5
P	0,3	0,5	0,2

Y	1	2	3
P	0,4	0,2	0,4

Знайти $M(2X-3Y)$ і $D(2X-3Y)$.

Розв'язання. Використовуючи властивості математичного сподівання і дисперсії, маємо:

$M(2X-3Y)=2M(X)-3M(Y)$, $D(2X-3Y)=4D(X)+9D(Y)$.

Тому знаходимо: $M(X)=2\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}5+5\cdot 0{,}2=3{,}6$;

$M(Y)=1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}4=2$;

$D(X)=2^2\cdot 0{,}3+4^2\cdot 0{,}5+5^2\cdot 0{,}2-3{,}6^2=1{,}24$;

$M(Y)=1^2\cdot 0{,}4+2^2\cdot 0{,}2+3^2\cdot 0{,}4-2^2=0{,}8$;

$M(2X-3Y)=2\cdot 3{,}6-3\cdot 2=1{,}2$;

$D(2X-3Y)=4\cdot 1{,}24+9\cdot 0{,}8=4{,}96+7{,}2=12{,}16$.

Приклад 77. Дано можливі значення дискретної випадкової величини: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ та математичні сподівання цієї величини і її квадрата: $M(X) = 2{,}2$, $M(X^2) = 6{,}8$. Знайти ймовірності p_1, p_2, p_3, які відповідають можливим значенням x_1, x_2, x_3.

Розв'язання. Виходячи з умови задачі, складаємо систему рівнянь відносно ймовірностей:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ 0 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 4 \cdot p_3 = 2{,}2, \\ 0^2 \cdot p_1 + 2^2 \cdot p_2 + 4^2 \cdot p_3 = 6{,}8, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ p_2 + 2 \cdot p_3 = 1{,}1, \\ p_2 + 4 \cdot p_3 = 1{,}7. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо: $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}3$.

Приклад 78. Знайти дисперсію випадкової величини X – числа появи події A в шести незалежних дослідах, якщо ймовірність появи події A в кожному досліді дорівнює 0,7.

Розв'язання. Оскільки ймовірність появи події в кожному досліді однакова та випадкова величина X розподілена за біноміальним законом. Тому дисперсія $D(X) = npq$.

За умовою: $n = 6$, $p = 0{,}7$, $q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Шукана дисперсія дорівнює $D(X) = npq = 6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 1{,}26$.

Приклад 79. Задано закон розподілу випадкової величини X:

X	3	5	6	8
P	0,2	0,4	0,3	0,1

Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Відповідь. $M(X) = 5{,}2$; $D(X) = 1{,}96$; $\sigma(X) = 1{,}4$.

Приклад 80. Задані закони розподілу двох незалежних випадкових величин X та Y:

X	1	2
P	0,4	0,6

Y	4	6
P	0,8	0,2

Знайти $D(3X - 2Y)$.

Відповідь. $D(3X - 2Y) = 4{,}72$.

Приклад 81. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два можливих значення: x_1 і x_2, при чому $x_1 < x_2$.

Ймовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу величини X, якщо $M(X)=1{,}4$; $D(X)=0{,}24$.

Відповідь.

X	1	2
P	0,6	0,4

Приклад 82. Задані можливі значення дискретної випадкової величини $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$, а також $M(X)=3{,}2$, $M(X^2)=11$. Знайти ймовірності p_1, p_2, p_3, які відповідають можливим значенням x_1, x_2, x_3.

Відповідь. $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}5$.

Приклад 83. Знайти дисперсію випадкової величини X – числа появи події A в чотирьох незалежних дослідах, якщо ймовірність появи події в цих дослідах однакова і відомо, що $M(X)=3{,}2$.

Відповідь. $D(X)=0{,}64$.

Приклад 84. Кинуто два гральні кубики. Знайти дисперсію суми чисел, які можуть появитись на верхніх гранях цих кубиків.

(Вказівка. Випадання числа на кожному з 2-ох кубиків можна розглядати, як дві однаково розподілені випадкові величини.)

Відповідь. $D(X)=\dfrac{35}{6}$.

§9. Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу. Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в заданий інтервал. Числові характеристики

Нехай X – неперервна випадкова величина, а $F(x) = P(X < x)$ і $f(x) = F'(x)$ – відповідно функція розподілу ймовірностей (інтегральна функція) і щільність розподілу (диференціальна функція) цієї випадкової величини.

Знаючи диференціальну функцію, можна знайти інтегральну функцію за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

Ймовірність того, що значення випадкової величини X належать проміжку $(a;b)$, визначається за формулами:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \text{ або } P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx .$$

Для знаходження числових характеристик випадкової величини X маємо формули:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx \text{ і } D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(M(x)\right)^2 .$$

В частинному випадку, якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу $(a;b)$, то

$$M(X) = \int_{a}^{b} x\, f(x)dx \text{ і } D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - \left(M(x)\right)^2 .$$

Приклад 85. Випадкова величина X задана функцією розподілу: $F(x) = \begin{cases} 0, \; при \; x \le 1, \\ (x-1)^2, \; при \; 1 < x \le 2, \\ 1, \; при \; x > 2. \end{cases}$

Знайти ймовірність того, що в результаті 5 незалежних випробувань випадкова величина X три рази прийме значення, яке належить інтервалу $(1{,}25; 1{,}75)$.

Розв'язання. Знаходимо ймовірність попадання випадкової величини в заданий проміжок в одному випробуванні:

$P(1{,}25 < X < 1{,}75) = F(1{,}75) - F(1{,}25) = 0{,}75^2 - 0{,}25^2 = 0{,}5$.

Шукану ймовірність знайдемо за формулою Бернуллі:

$P_5(3) = C_5^3\, p^3\, q^2 = C_5^3\, 0{,}5^3\, 0{,}5^2 = \dfrac{5}{16} = 0{,}3125$.

Приклад 86. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x) = \sin 2x$ в проміжку $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, а за його межами $f(x) = 0$. Знайти ймовірність того, що X приймає значення, які належать інтервалу $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Скористаємось формулою: $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Оскільки, $a = \dfrac{\pi}{6}$, $b = \dfrac{\pi}{4}$, $f(x) = \sin 2x$, маємо:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 87. Знайти функцію розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X, якщо відома щільність розподілу: $f(x) = \begin{cases} 0, \; \textit{якщо } x \le 0, \\ 2\cos 2x, \; \textit{якщо } 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 0, \; \textit{якщо } x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Розв'язання. Використаємо формулу: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Якщо $x \le 0$, то $f(x) = 0$, тому $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$.

Якщо $0 < x \le \dfrac{\pi}{4}$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{x} 2\cos x\,dx = \sin 2x\Big|_0^2 = \sin 2x$.

Якщо $x > \dfrac{\pi}{4}$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{x} 0\,dx = \sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$.

$$\text{Отже, } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ \sin 2x, & \text{якщо } 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & \text{якщо } x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Приклад 88. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{якщо } 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо щільність розподілу ймовірностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & \text{якщо } 0 < x \le 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Знаходимо математичне сподівання:

$$M(X) = \int\limits_a^b x\,f(x)\,dx = \int\limits_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,dx = \int\limits_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^3}{6}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Знаходимо дисперсію:

$$D(X) = \int\limits_a^b x^2 f(x)\,dx - \left(M(x)\right)^2 = \int\limits_0^2 \frac{x^3}{2}\,dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{x^4}{8}\Bigg|_0^2 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

.

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Отже, $M(X)=\dfrac{4}{3}$, $D(X)=\dfrac{2}{9}$, $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Приклад 89. Задана інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини X:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{якщо } x\le 0,\\ x^2, \ \textit{якщо } 0<x\le 1,\\ 1, \ \textit{якщо } x>1.\end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в чотирьох незалежних випробуваннях величина X три рази прийме значення, які лежать в інтервалі $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Відповідь. $P_4(3)=\dfrac{27}{64}$.

Приклад 90. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x$ в проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, а за його межами $f(x)=0$. Знайти ймовірність того, що X приймає значення, які належать інтервалу $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Відповідь. 0,5.

Приклад 91. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X дорівнює $f(x)=C\sin 4x$ в інтервалі $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$, а за його межами $f(x)=0$. Знайти сталий множник *C*.

Відповідь. *C*=2.

Приклад 92. Знайти функцію розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X, якщо відома щільність розподілу: $f(x)=\begin{cases} 0, \ \text{якщо } x \le 0, \\ \dfrac{1}{4}x^3, \ \text{якщо } 0 < x \le 2, \\ 0, \ \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

Відповідь. $F(x)=\begin{cases} 0, \ \text{якщо } x \le 0, \\ \dfrac{1}{16}x^4, \ \text{якщо } 0 < x \le 2, \\ 1, \ \text{якщо } x > 2. \end{cases}$.

Приклад 93. Знайти числові характеристики неперервної величини X, заданої функцією розподілу: $F(x)=\begin{cases} 0, \ \text{якщо } x \le 1, \\ \dfrac{(x-1)^2}{9}, \ \text{якщо } 1 < x \le 4, \\ 1, \ \text{якщо } x > 4. \end{cases}$

Відповідь. $M(X)=3$, $D(X)=\dfrac{1}{2}$, $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 94. Інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини X – часу безвідмовної роботи деякого пристрою дорівнює: $F(x)=1-e^{-\frac{x}{T}}$, $x \ge 0$. Знайти ймовірність безвідмовної роботи пристрою за час $x \ge T$.

Відповідь. $P(X \ge T)=1-P(X<T)=\dfrac{1}{e}$.

§10. Рівномірний, показниковий і нормальний закони розподілу. Ймовірність попадання нормально розподіленої величини в заданий інтервал та ймовірність заданого відхилення

При рівномірному розподілі ймовірностей неперервної випадкової величини X на проміжку $[a;b]$ щільність розподілу $f(x)$ і функція розподілу $F(x)$ мають вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, \ якщо\ x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, \ якщо\ a\le x\le b,\\ 0, \ якщо\ x>b,\end{cases} \text{ і } F(x)=\begin{cases}0, \ якщо\ x<0,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, \ якщо\ a\le x\le b,\\ 1, \ якщо\ x>b,\end{cases}$$

а числові характеристики – визначаються формулами:

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показниковий розподіл неперервної випадкової величини X визначається щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0, \ якщо\ x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, \ якщо\ x\ge 0,\end{cases}$$

де $\lambda>0$ – параметр. В цьому випадку маємо, що функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ якщо\ x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, \ якщо\ x\ge 0,\end{cases}$$

а числові характеристики – $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Найбільш часто на практиці використовується нормальний закон розподілу, який визначається щільністю розподілу:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a – математичне сподівання, σ – середнє квадратичне відхилення.

Ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X на проміжок $(\alpha; \beta)$ визначається за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа.

Ймовірність того, що відхилення такої випадкової величини X від математичного сподівання a, не перевищує по абсолютній величині $\delta > 0$:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Приклад 95. Ціна поділки вимірювального приладу дорівнює 0,1. Показання приладу заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що буде допущена помилка *а*) більша 0,03; *б*) менша 0,04.

Розв'язання. Помилку заокруглення можна розглядати як випадкову величину X розподіленою рівномірно в проміжку між двома цілими поділками. За умовою $b - a = 0{,}1$ і щільність розподілу $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{0{,}1} = 10$ на цьому проміжку, а поза ним $f(x) = 0$;

а) помилка буде більшою 0,03, якщо вона буде міститись в інтервалі $(0{,}03; 0{,}07)$. За формулою $P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$, маємо: $P(0{,}03 < X < 0{,}07) = \int_{0{,}03}^{0{,}07} 10dx = 10x\Big|_{0{,}03}^{0{,}07} = 0{,}4$;

б) помилка буде меншою 0,04, якщо вона буде міститись в інтервалах $(0; 0{,}04)$ і $(0{,}06; 0{,}1)$. Тому $P(0 < X < 0{,}04) +$
$+ P(0{,}06 < X < 0{,}1) = \int_0^{0{,}04} 10dx + \int_{0{,}06}^{0{,}1} 10dx = 10x\Big|_0^{0{,}04} + 10x\Big|_{0{,}06}^{0{,}1} = 0{,}8$.

Приклад 96. Час безвідмовної роботи приладу розподілений за показниковим законом $f(t) = 0{,}001e^{-0{,}001t}$, де t – час в годинах. Знайти ймовірність того, що прилад працюватиме безвідмовно 100 годин.

Розв'язання. Ймовірність відмови приладу протягом часу t годин $P(T<t)=F(t)$.

Оскільки $P(T<t)+P(T=t)+P(T>t)=1$ і $P(T=t)=0$, то ймовірність того, що прилад працюватиме безвідмовно t годин визначається рівністю: $P(T>t)=1-P(T<t)=1-F(t)$.

У заданому випадку, маємо: $F(t)=\begin{cases} 0, \ \textit{якщо } t<0, \\ 1-e^{-0,001t}, \ \textit{якщо } t\ge 0, \end{cases}$

тому $P(T>t)=e^{-0,001\,t}$.

Отже, $P(T>100)=e^{-0,1}=0{,}905$.

Приклад 97. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 12 і 4. Знайти *а*) ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення в інтервалі $(16;22)$; *б*) інтервал, в який з ймовірністю 0,954 попадає величина X.

Розв'язання.

а) Використаємо формулу: $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$

За умовою $\alpha=16$, $\beta=22$, $a=12$, $\sigma=4$, тому маємо:

$$P(16<X<22)=\Phi\left(\frac{22-12}{4}\right)-\Phi\left(\frac{16-12}{4}\right)=\Phi(2{,}5)-\Phi(1)=$$

$$=0{,}494-0{,}341=0{,}153.$$

б) Оскільки $P\left(|X-a|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, то $2\Phi\left(\frac{\delta}{4}\right)=0{,}954$;

$\Phi\left(\frac{\delta}{4}\right)=0{,}477$. За таблицею значень функції Лапласа,

знаходимо $\frac{\delta}{4}=2$; $\delta=8$. Тому $|X-12|<8$ або $4<X<20$ – шуканий інтервал.

Приклад 98. Вимірюється довжина деталі без систематичних (одного знаку) помилок. Випадкова помилка при вимірюванні X – нормальна розподілена величина з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5\,мм$. Знайти ймовірність того, що вимірювання виконане з помилкою, яка не перевищує по абсолютній величині $10\,мм$.

Розв'язання. Математичне сподівання випадкових помилок дорівнює нулю. Використовуючи формулу $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, маємо:

$P(|X|<10)=2\Phi(2)=2\cdot 0{,}477=0{,}954$.

Приклад 99. Хвилинна стрілка годинника переміщається скачками вкінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в даний момент годинник вкаже час, який відрізняється від справжнього часу не більше ніж на 15 секунд.

Відповідь. 0,5.

Приклад 100. Знайти числові характеристики випадкової величини X розподіленої рівномірно в інтервалі $[2;8]$.

Відповідь. $M(X)=5$, $D(X)=3$.

Приклад 101. Маршрутний автобус йде за розкладом з інтервалом 20 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який прийшов на зупинку буде чекати черговий автобус менше 12 хв.

Відповідь. 0,6.

Приклад 102. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Знайти $P(10<X<40)$, якщо $M(X)=30$, $D(X)=100$.

Відповідь. 0,818.

Приклад 103. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=10$, $\sigma=4$. Знайти $P(|X-a|<2)$.

Відповідь. 0,384.

Приклад 104. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $M(X)=20$, $\sigma(X)=5$.

Знайти інтервал, в який з ймовірністю 0,9973 попаде величина X .

Відповідь. $5 < X < 35$.

Приклад 105. Проводиться зважування деякої речовини без систематичних похибок. Випадкові похибки X зважування розподілені за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 12$ *г*. Знайти ймовірність того, що зважування буде виконано з похибкою, яка за модулем не перевищує 15 *г*.

Відповідь. 0,788.

Приклад 106. В цеху автоматично виготовляються деталі. Деталь вважається придатною, якщо відхилення X її довжини від стандартної довжини по абсолютній величині менше 0,4 *мм*. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = 0{,}2$ *мм*. Знайти скільки буде придатних деталей серед 100 виготовлених.

Відповідь. 95.

§11. Нерівність Чебишова. Закон великих чисел

За деяких умов, в суми великої кількості випадкових величин майже втрачається випадковість і спостерігається закономірність у поведінці. Умови при яких це можливо, наведені в теоремах закону великих чисел. Для обґрунтування цих теорем важливим знаряддям виявляється нерівність Чебишова:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

або при переході до протилежної події, дістаємо:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

На основі нерівності Чебишова доводиться теорема Чебишова.

Теорема Чебишова. Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ є послідовність попарно незалежних випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями і дисперсії яких обмежені одним і тим самим числом D, то яким би малим не було $\varepsilon > 0$, має місце співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Частинний випадок:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

де $a = M(X_i),\ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

До теорем закону великих чисел належить теорема Бернуллі (яка є окремим випадком теореми Чебишова): при необмеженому збільшення числа незалежних випробувань, в кожному з яких може відбутись випадкова подія A з ймовірністю p, відносна частота $P_n^*(A)$ події A в серії n випробувань збігається за ймовірністю до ймовірності цієї події, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| P_n^* - P\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Приклад 107. Випадкова величина задана законом розподілу:

X	0,2	0,4
P	0,3	0,7

Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити $P\left(\left|X - M(X)\right| < 0{,}2\right)$.

Розв'язання. Знаходимо числові характеристики:

$M(X) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}34$,

$D(X) = 0{,}2^2 \cdot 0{,}3 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}7 - 0{,}34^2 = 0{,}0084$.

Використовуємо нерівність Чебишова у формі:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Підставивши у формулу $M(X)=0{,}34$, $D(X)=0{,}0084$, $\varepsilon=0{,}2$, отримаємо: $P\left(\left|X-0{,}34\right|<0{,}2\right)\geq 1-\frac{0{,}0084}{0{,}04}=1-0{,}21=0{,}79$.

Приклад 108. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,6. Користуючись нерівністю Чебишова оцінити ймовірність того, що число X появи події A при 50 незалежних випробуваннях буде знаходитись в межах від 20 до 40.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X, розподіленої за біноміальним законом: $M(X)=n\,p=50\cdot 0{,}6=30$; $D(X)=n\,p\,q=50\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=12$.

Знайдемо максимальну різницю між заданим числом появи події і математичним сподіванням: $\varepsilon=40-30=10$. Підставивши у нерівність Чебишова $M(X)=30$, $D(X)=12$, $\varepsilon=10$, отримаємо: $P\left(\left|X-30\right|<10\right)\geq 1-\frac{12}{10^2}=0{,}88$.

Приклад 109. Відомо, що дисперсія кожної із заданих випадкових величин не перевищує 4. Знайти число таких величин, при якому з ймовірністю не менше 0,9, відхилення середнього арифметичного випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань не більше ніж на 0,25.

Розв'язання. Нехай X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ – випадкові величини, задані в умові. Оскільки їх дисперсії не перевищують 4, то $D(X_i)\leq 4$, $i=1,2,\ldots,n$.

Розглянемо випадкову величину $X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ та її числові характеристики: $M(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)$ і

$$D(X)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_2)\leq\frac{1}{n^2}4n=\frac{4}{n}.$$

За допомогою нерівності Чебишова, маємо

$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ або

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i\right)\right|<0{,}25\right)\ge 1-\frac{1}{n\cdot 0{,}25^2}=0{,}9 \text{ і } 1-\frac{64}{n}=0{,}9;$$

$$\frac{64}{n}=0{,}1;\ n=640\ .$$

Приклад 110. Послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ задана законом розподілу:

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Довести, що до заданої послідовності можна використати теорему Чебишова.

Розв'язання. 1) Оскільки величини незалежні, то вони є попарно незалежними; 2) $M(X_n)=0$, тому всі випадкові величини мають скінченні (рівні нулю) математичні сподівання; 3) $D(X_n)=\alpha^2$ отже, дисперсії обмежені.

Маємо, що всі умови теореми Чебишова для заданої послідовності виконуються, тому теорему можна використати.

Приклад 111. Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити $P(|X-M(X)|<0{,}2)$. ***Відповідь.*** $P(|X-0{,}54|<0{,}2)\ge 0{,}64$.

Приклад 112. В цеху встановлено 20 незалежно працюючих верстатів. Ймовірність того, що за час t верстат буде працювати, дорівнює 0,8. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом працюючих верстатів і математичним сподіванням працюючих верстатів за час t буде менша трьох

Відповідь. $p\ge 0{,}64$.

Список використаної літератури

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М. : Наука, 1985. 368 с.

2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М. : Высшая школа, 1979. 333 с.

3. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей. К. : Вища школа, 1977. 156 с.

4. Жалдак М. І. Початки теорії ймовірностей. К. : «Радянська школа», 1978. 142 с.

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0,0	0,000	004	008	012	016	020	024	028	032	036
0,1	040	044	048	052	056	060	064	068	071	075
0,2	079	083	087	091	095	099	103	106	110	114
0,3	118	122	126	129	133	137	141	144	148	152
0,4	155	159	163	166	170	174	177	181	184	188
0,5	192	195	199	202	205	209	212	216	219	222
0,6	226	229	232	236	239	242	245	249	252	255
0,7	258	261	264	267	270	273	276	279	282	285
0,8	288	291	294	297	300	302	305	308	311	313
0,9	316	319	321	324	326	329	332	334	337	339
1,0	341	344	346	349	351	353	355	358	360	362
1,1	364	367	369	371	373	375	377	379	381	383
1,2	385	387	389	391	393	394	396	398	400	402
1,3	403	405	407	408	410	412	413	415	416	418
1,4	419	421	422	424	425	427	428	429	431	432
1,5	433	435	436	437	438	439	441	442	443	444
1,6	445	446	447	448	450	451	452	453	454	455
1,7	455	456	457	458	459	460	461	462	463	463
1,8	464	465	466	466	467	468	469	469	470	471
1,9	471	472	473	473	474	474	475	476	476	477
2,0	477	478	478	479	479	480	480	481	481	481
2,1	482	483	483	484	484	484	485	485	485	485
2,2	486	486	487	487	488	488	488	489	489	489
2,3	489	489	490	490	490	491	491	491	491	492
2,4	492	492	492	493	493	493	493	493	493	494
2,5	494	494	494	495	495	495	495	495	495	495
2,6	495	495	496	496	496	496	496	496	496	496
2,7	497	497	497	497	497	497	497	497	497	497
2,8	497	498	498	498	498	498	498	498	498	498
2,9	498	498	498	498	499	499	499	499	499	499
3,0	499	499	499	499	499	499	499	499	499	499
3,1	499	499	499	499	499	499	499	499	499	499
3,2	499	499	499	499	499	499	499	499	499	499
3,3	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
3,4	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500

Примітка: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; при $x \geq 3{,}3$ $\Phi(x) \approx 0{,}500$.